

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI****15.02.2025****Clasa a XI-a****Subiectul I (7 puncte)**

Fie  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea  $AB = \begin{pmatrix} 2024 & 2025 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Aflați matricea  $A$  știind că  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

b) Arătați ca matricea  $BA$  este inversabilă și  $BA - (BA)^{-1} = 2025 \cdot I_2$ .

**Subiectul II (7 puncte)**

Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ . Dacă  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & c_n & d_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$ , calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{c_n} \right)^{b_n + d_n}.$$

**Subiectul III (7 puncte)**

Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin relația  $2024^{x_n} + 2025^{x_n} = n, \forall n \geq 1$ .

a) Arătați că ecuația  $2024^x + 2025^x = n$  are soluție reală unică,  $\forall n \geq 1$ .

b) Arătați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător și nemărginit.

c) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n}$ .

**Subiectul IV (7 puncte)**

Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = a \in \mathbb{R}$  și  $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2a_n^2 + 1}} \forall n \geq 1$ . Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2.$$

Problema 28989 - GM nr. 11/2024

**Notă:**

- Timp de lucru 3 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii.